Concursul naţional de matematică pentru studenţi “Traian Lalescu”
Sibiu 2016

Secţiunea C

1. a) Să se determine mulţimea de convergenţă a seriei de puteri $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot 2^{2n}}$.

b) Să se dezvolte în serie Taylor în jurul originii funcţia $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x+2}{2-x}$.

c) Să se calculeze suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n}}$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}, f(x,y)=\frac{x^{2015}+y^{2015}}{x^{1008}+y^{1008}}\cdot e^{-x^{2016}}$.

a) Să se calculeze

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

b) Să se studieze diferenţiabilitatea funcţiei $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, g(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

c) Să se calculeze

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x+y}$$

d) Să se afle valoarea integralei $\int_0^{\infty} f(x,x)dx$.

3. Se dau sfera $S: x^2+y^2+z^2=1$ şi planul $(\pi): 2x+2y+z-9=0$.

a) Stabiliţi poziţia sferei S faţă de planul (π).
b) Să se scrie ecuaţia simetricei sferei S faţă de planul (π).
c) Aflaţi sferele care conţin cercul $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2=4\\ z=0\end{cases}$ şi sunt tangente sferei S [illegible] $z^2=1$.
d) Să se determine ecuaţia conicei obţinute din intersecţia cu planul orizontal xOy a dreptelor perpendiculare pe planul (π) tangente la sfera S şi să se precizeze natura acesteia.

4. Fie $M_2(\mathbb{R})$ spaţiul vectorial al matricelor reale cu 2 linii şi 2 coloane şi fie $B = \left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ baza canonică asociată. Fie $T : V \to V$ transformarea liniară definită prin $T(A) = 2A + 3A^t$, $A \in V$, unde A^t înseamnă matricea transpusă.

a) Să se arate că matricea $m_B(T)$ a transformării T în baza canonică B este:

$$m_B(T) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Să se scrie matricea transformării T în baza

$$B' = \left\{ F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, F_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) Să se determine nucleul şi imaginea transformării T şi să se verifice teorema dimensiunii pentru aplicaţii liniare (teorema rang-defect).

d) Să se determine valorile şi vectorii proprii (în baza B) pentru transformarea T.

e) Să se calculeze $T^{2016}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.Timp de lucru 4 ore.